

# 清大數 115 二階

## 數學一

1. 已知  $x \in \mathbb{R}$ , 求  $\frac{2^{\cos x}}{3^{\sin x}}$  的最大值。

2. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 2n^2 + 2} - n)$  或證明其值不存在。

3. 已知  $x \in [0, 2\pi]$ , 且

$$\begin{cases} \cos(2x) > \sin(x) \\ \sin(2x) > \cos(x) \end{cases}$$

求滿足條件的  $x$ 。

4. 某人擊中靶心的機率為  $\frac{1}{3}$ , 若要使擊中靶心的機率大於 90%, 至少要射幾發?

5. 給定一多項式:  $x^4 - x^3 - 5x^2 + 5x + k = 0$ , 其中兩根之和為 1, 求  $k$  及所有根。

6. 已知  $y = -x^2 + 4x$  和  $x$  軸所圍成的區域面積為  $A$ ,  $y = -x^2 + 4x$  和  $y = mx$  所圍成的區域面積為  $\frac{A}{8}$ , 求  $m = ?$

## 數學二

1. 已知  $a, b > 0, a \neq b$  試證  $a^ab^b > a^bb^a$
2. 在複數平面上給定一圓  $|z| = r, w = z + \frac{1}{z}$ 。
  - (a) 當  $r \neq 1$  時,  $w$  的軌跡為何?
  - (b) 當  $r = 1$  時  $w$  的軌跡為何?
3. 一三角形  $ABC$ ,  $\overline{AB} = 3, \overline{AC} = 4, \angle BAC = 60^\circ, P$  在  $\overline{BC}$  上,  $Q$  在  $\overline{AP}$  上, 求所有  $P$  滿足: 當  $\overline{BQ}^2 + \overline{CQ}^2$  有最小值時,  $Q$  不為  $A$  或  $P$ 。
4. 複數平面上,  $A = -2, B = 2, P = z, P$  不在實數軸上,  $||z + 2| - |z - 2|| = 2, \angle APB = 60^\circ$ , 求三角形  $APB$  的面積。
5. 給定一二階方陣  $A$ , 其元素均為整數且滿足:
$$A^2 = A, \quad A \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
試證:  $\exists u, v, x, y \in \mathbb{Z} \quad s.t. \quad ux + vy = 1 \quad \text{and} \quad A = \begin{bmatrix} ux & uy \\ vx & vy \end{bmatrix}$
6. 找出所有首相為正的整係數多項式函數  $f(x)$  使得  $\forall n \in \mathbb{N}, f(n+1)|f(n)$ 。