1、目前已知的最大質數為 $2^{74207281}-1$，回答下列問題：(15%)

(1) 試估計有幾位數？

(2) 以十進位法，此數的個位數字是多少？

(3) 以十六進位法，　　〃　　？

(用 a、b、c、d、e、f 表示 10、11、12、13、14、15)

2、丟一骰子數次，令 X 是丟擲次數，若點數和為 ≥ 4 時就停止，

問：$E(X)=$？(15%)

3、設 $f(x)$ 為四次實係數多項式，最高次係數 $=1$，且 $f(x)$ 在 $x=1$、$x=-1$ 時為反曲點。另設 $g(x)$ 為過 $(1, f(1))$、$(-1, f(-1))$ 的直線，則 $g(x)$ 交在 $f(x)$ 的另2個點之 x 坐標 $=$？(15%)

4、令 $f(x)=2x^2+4x+1$，$g(x)=x^2+x+1$，試找出所有實數 x 使

$\frac{f(x)}{g(x)}$ 為正整數。(15%)

5、回答下列問題：(20%)

(1) 證明：有一三角形，分別以頂點為圓心作一圓，並取適當半徑後，此三圓必兩兩相切。

(2) 若 $\triangle ABC$ 邊長為 5、6、9，P、Q、R 為切點，則 $\triangle PQR$ 三邊長分別為？

6、令一數列 $\langle a_n \rangle$，其中 $a_1 > \sqrt{t}$ (t 為一實數)，$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{t}{a_n}\right)$，$n \in N$

回答下列問題：(20%)

(1) 證明：a_n 恆 $> \sqrt{t}$

(2) 證明：$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$

(3) 若已知 $\langle a_n \rangle$ 收斂，$\lim_{n\to\infty} a_n =$？

數學一

數學 二

1. 若點 $(\log a, \log b)$ 在橢圓 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 上變動，則 $k=ab$ 的取值範圍=？(15%)

2. 現有一生物：

出生 1 天，再存活 2天機率為 50%

〃 1 天，〃 3天 〃 20%

〃 2 天，〃 2天 〃 25%

出生、存活互為獨立事件，問：出生2天後，再存活1天的機率？(15%)

3. 有六條直線：$x=3$，$x=-2$，$2x+y=7$，$2x+y=11$，$3x+y-z=-2$，$3x+y-z=9$，問此六直線形成的平行六面体体積？(15%)

4. 令 $f(x)$ 為實係數多項式，且 $f(0)=f(1)=0$，另外 $|f''(x)|\le 1$ 在 $x\in[0,1]$ 時恆成立：(15%)

(1) 証：$\frac{1}{2}x(1-x)$ 符合條件，並求其最大值（$x\in[0,1]$時）=？

(2) 令 $M(f)$ 為 $f(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 時之最大值，証：$M(f)\le\frac{1}{8}$

5. 令 $A=\begin{bmatrix}4&3\\2&3\end{bmatrix}$、$P=\begin{bmatrix}3&-1\\2&1\end{bmatrix}$ (20%)

(1) $P^{-1}A^nP=$ ？

(2) 已知 $x_0=y_0=7$，且 $x_n=4x_{n-1}+3y_{n-1}$，$y_n=2x_{n-1}+3y_{n-1}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=$？

6. 設圓O內有內接一正n邊形 $A_1A_2A_3\cdots A_n$：(20%)

(1) 証：$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\cdots+\overrightarrow{OA_n}=\vec{0}$

(2) 証：$\sum\limits_{k=1}^{n-1}\cos(\alpha+\frac{2k}{n}\pi)=0$，其中 α 為一定值，$n\in N$

(3) 証：$\cos\frac{\pi}{5}-\cos\frac{2\pi}{5}$ 為有理數。