2015 清華大學數學系　第二階段筆試／甄試　①

考試時間：80 分鐘

1. 設有一數列$\langle a_n \rangle$，其中 $a_1=1$、$a_2=2$、$a_3=3$，且 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}\ (n\geq 4)$，試証：$a_n<2^n$。

2. 已知$c_0+c_1+c_2=0$，試証：$\lim\limits_{n\to\infty}[c_0\sqrt{n}+c_1\sqrt{n+1}+c_2\sqrt{n+2}]=0$。

3. 設有一圓$C:(x-11)^2+(y-5)^2=13^2$，試估算圓 C 在第一象限之面積。

4. 空間中一平面 E 過 $P(2, 3, 4)$，且其方向向量為(a, b, c)。試求 E 和 xy, yz, xz 平面所圍成的四面體最小體積為何？

5. 一直線 L 和 $y=x^4-2x^2+x$ 切於兩相異點：

(a.) 求直線 L 的方程式。

(b.) 試証直線 L 唯一存在。

6. (a.) 求 $x+y+z=23$ 的非負整數解有幾組。

(b.) 求滿足(a.)之非負整數解，$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2$ 的最小值。

7. (a.) 已知平面上有兩點 A(1, 1)、B(2, 2)，試在 x 軸上找一點 P 使得$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值。

(b.) 已知空間中有兩點 A(?)、B(?)，有一直線$L:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=z$，試在 L 上找一點 P 使得$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值。

1. 空間中有三向量$\vec{u}$、$\vec{v}$、$\vec{w}$，其中$|\vec{u}|=|\vec{v}|=\sqrt{2}$、$|\vec{w}|=1$，已知向量$\vec{u}$、$\vec{v}$的夾角為$120^\circ$，向量$\vec{v}$、$\vec{w}$的夾角為$135^\circ$，向量$\vec{u}$、$\vec{w}$的夾角為$90^\circ$，若向量$\vec{u}+2\vec{v}+2\vec{w}$與$\vec{v}$夾角為$\theta$，求$\tan\theta$

2. 求一實數 k，使得$\log kx = 2\log(x+1)$之 x 恰有一解

3. 若 $f(x)\in Z[x]$ ($f(x)$ 為整係數多項式)，已知 $f(0)=3$ 、 $f(1)=11$。試証： $f(x)=0$ 無整數解

4. 已知正方形 ABCD 的邊長為 1，$\overline{AB}$ 上有一點 P，$\overline{AD}$ 上有一點 Q，試証：當ΔAPQ 周長為 2 時，$\angle PCQ$ 恆為 45°。

5. 平面上有一拋物線$\Gamma: y=x^2-\dfrac{3}{4}$，若圓$C$之圓心都落在$\Gamma$之<u>下半平面</u>（<u>$x$ 軸下方</u>），另所有符合條件的圓所構成的集合為 S。試證： $S=\{(x, y)\,|\,x^2+(y+\frac{1}{2})^2\le 1 \text{ 且 } y<0\}$

6. 一袋中有十顆黑球，開始時隨機由袋中取兩顆球，再放入兩顆白球，如此稱為一次操作。令E_n表操作 n 次後，袋中的白球個數的期望值，試求：E_n 與$\lim\limits_{n\to\infty}E_n$

7. 若 A 為一個二階方陣，且 $A^3+A^2+A+I=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，其中$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，試問：

(a.) $A\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}A$是否成立？　　(b.) A的反矩陣(A^{-1})是否存在？